湛江一中2023届高三卓越班 NLXF2023—17

**高三数学一轮复习——解析几何小专题（21）—— 圆锥曲线背景下动切线的处理**

**方法总结**

方法一：设切线*y*＝*kx*＋*m，*找k与m的关系（圆就用d=r，圆锥曲线就用Δ=0），条件与目标用k与m表示，寻求解决办法

方法二：设曲线上的切点(*x*0，*y*0)，表示切线方程（圆的方程为*x*0*x*＋*y*0*y*＝*R*2 椭圆的切线方程＋＝1 双曲线的切线方程 *-* ＝1）用(*x*0，*y*0)表示条件与目标，寻求解决办法

方法三：设切线*y-y*0＝*k*（*x-x*0）*，*找k与*x*0，*y*0的关系（圆就用d=r，圆锥曲线就用Δ=0），条件与目标用k与*x*0，*y*0表示，寻求解决办法

方法四：设抛物线上的切点(*x*0，*y*0)，求导的斜率，表示切线方程，用(*x*0，*y*0)表示条件与目标，寻求解决办法

**类型一、圆的动切线**

1.已知椭圆，其右焦点为，点*M*在圆上但不在轴上，过点作圆的切线交椭圆于，两点，当点在轴上时，.

(1)求椭圆的标准方程；

(2)当点在圆上运动时，试探究周长的取值范围.

2.已知椭圆*C*的方程为＋＝1(*a*>*b*>0)，右焦点为*F*(，0)，且离心率为.

(1)求椭圆*C*的方程；

(2)设*M*，*N*是椭圆*C*上的两点，直线*MN*与曲线*x*2＋*y*2＝*b*2(*x*>0)相切.证明：*M*，*N*，*F*三点共线的充要条件是|*MN*|＝.

3.已知椭圆的上顶点为*M*､右顶点为*N*.(点*O*为坐标原点)的面积为1，直线被椭圆*C*所截得的线段长度为.

（1）椭圆*C*的标准方程；

（2）试判断椭圆*C*内是否存在圆，使得圆*O*的任意一条切线与椭圆*C*交于*A*，*B*两点时，满足为定值？若存在，求出圆*O*的方程；若不存在，请说明理由.

4.已知为双曲线的左、右焦点，过点作垂直于轴的直线，并在轴上方交双曲线于点，且．

（1）求双曲线的方程；

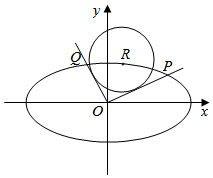
（2）过圆上任意一点作圆的切线，交双曲线于两个不同的点，的中点为，证明：．

5.已知椭圆的一焦点与短轴的两个端点组成的三角形是等边三角形，直线与椭圆的两交点间的距离为8.

（1）求椭圆的方程；

（2）如图，设是椭圆上的一动点，由原点向圆引两条切线，分别交椭圆于点，，若直线，的斜率均存在，并分别记为，，求证：为定值；

（3）在（2）的条件下，试问是否为定值？若是，求出该值；若不是，请说明理由.



6.抛物线*C*的顶点为坐标原点*O*，焦点在*x*轴上，直线*l*：*x*＝1交*C*于*P*，*Q*两点，且*OP*⊥*OQ*.已知点*M*(2，0)，且⊙*M*与*l*相切.

(1)求抛物线*C*，⊙*M*的方程；

(2)设*A*1，*A*2，*A*3是*C*上的三个点，直线*A*1*A*2，*A*1*A*3均与⊙*M*相切.判断直线*A*2*A*3与⊙*M*的位置关系，并说明理由.

**类型二、圆锥曲线的动切线**

7.已知点*A*(－1，0)，*B*(1，0)，动点*P*满足|*PA*|＋|*PB*|＝4，*P*点的轨迹为曲线*C*.

(1)求曲线*C*的方程；

(2)已知圆*x*2＋*y*2＝*R*2上任意一点*P*(*x*0，*y*0)处的切线方程为：*x*0*x*＋*y*0*y*＝*R*2，类比可知椭圆：＋＝1上任意一点*P*(*x*0，*y*0)处的切线方程为：＋＝1.记*l*1为曲线*C*在任意一点*P*处的切线，过点*B*作*BP*的垂线*l*2，设*l*1与*l*2交于*Q*，试问动点*Q*是否在定直线上？若在定直线上，求出此直线的方程；若不在定直线上，请说明理由.

8.在平面直角坐标系中，已知椭圆：的离心率为，且经过点.

（1）求椭圆的方程；

（2）设为椭圆的右焦点，直线与椭圆相切于点（点在第一象限），过原点作直线的平行线与直线相交于点，问：线段的长是否为定值？若是，求出定值；若不是，说明理由.

9.已知椭圆的离心率为，且经过点*.*设椭圆的左、右焦点分别为、，是椭圆上的一个动点（异于椭圆的左、右端点）*.*

（1）求椭圆的方程；

（2）过点作椭圆的切线，过点作的垂线，垂足为，求面积的最大值*.*

10已知椭圆：()的焦点在抛物线的准线上，且椭圆经过点.

（1）求椭圆的方程；

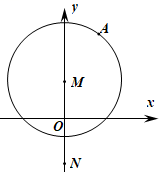
（2）设椭圆的左､右顶点分别为，，过，分别作长轴的垂线，，椭圆的一条切线：与直线，分别交于，两点.求证：以为直径的圆经过定点.

11.在一张纸片上，画有一个半径为4的圆（圆心为*M*）和一个定点*N*，且，若在圆上任取一点*A*，将纸片折叠使得*A*与*N*重合，得到折痕*BC*，直线*BC*与直线*AM*交于点*P*．

(1)若以*MN*所在直线为轴，*MN*的垂直平分线为*x*轴，建立如图所示的平面直角坐标系，求点*P*的轨迹方程；

(2)在（1）中点*P*的轨迹上任取一点*D*，以*D*点为切点作点*P*的轨迹的切线，分别交直线，于*S*，*T*两点，求证：的面积为定值，并求出该定值；

(3)在（1）基础上，在直线，上分别取点*G*，*Q*，当*G*，*Q*分别位于第一、二象限时，若，，求面积的取值范围．



12.．如图，已知抛物线上的点*R*的横坐标为1，焦点为*F*，且，过点作抛物线*C*的两条切线，切点分别为*A*、*B*，*D*为线段*PA*上的动点，过*D*作抛物线的切线，切点为*E*（异于点*A*，*B*），且直线*DE*交线段*PB*于点*H*.

(1)求抛物线*C*的方程；

(2)（i）求证：为定值；

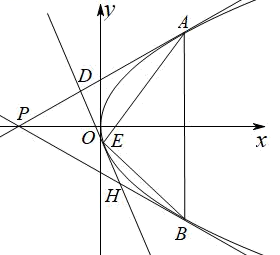
（ii）设，的面积分别为，求的最小值.

例2-3．（广东省珠海市2021届高三下学期第一次学业质量检测T21）．已知椭圆：，，为其左右焦点，离心率为，.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）设点，点在椭圆上，过点作椭圆的切线，斜率为，，的斜率分别为，，则是否是定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由.

（3）设点，点在椭圆上，点在的角分线上，求的取值范围.



13.已知椭圆方程为＋＝1，若抛物线*x*2＝2*py*(*p*>0)的焦点是椭圆的一个焦点.

(1)求该抛物线的方程；

(2)过抛物线焦点*F*的直线*l*交抛物线于*A*，*B*两点，分别在点*A*，*B*处作抛物线的切线，两条切线交于*P*点，则△*PAB*的面积是否存在最小值？若存在，求出这个最小值及此时对应的直线*l*的方程；若不存在，请说明理由.

14.已知动圆与轴相切且与圆相外切，圆心在轴的上方，点的轨迹为曲线.

（1）求的方程；

（2）已知，过点作直线交曲线于两点，分别以为切点作曲线的切线相交于，当的面积与的面积之比取最大值时，求直线的方程.

15.在平面直角坐标系eqId2272a344734c4fb088737b84294f7219中，eqId2381423d4cd146cab95f55527681a766为直线eqIdbe206d0603524b5daaf5bf1ad75b5b19上的动点，过点eqId2381423d4cd146cab95f55527681a766作抛物线eqIdba95c5d75d694dc49fb87f612634464f的两条切线eqId9de71e38d44e4ff68dc9d17481110cbf，切点分别为eqId43088bc159484601a10eb45ee0d2aa7d为eqId99a3187c2b8f4bcc9703c74c3b72f1f3的中点.

（1）证明eqIde6594a2984d743c2873dcad03c77d260轴；

（2）直线eqId99a3187c2b8f4bcc9703c74c3b72f1f3是否恒过定点？若是，求出这个定点的坐标；若不是，请说明理由.

16.已知抛物线*E*：的焦点为*F*，点在*E*上．

(1)求；

(2)抛物线*E*在点*T*处的切线为，经过点*F*的直线与抛物线*E*交于*A*、*B*两点（与*T*不重合），抛物线在*A*、*B*两点处的切线分别为、，若与交于*P*点，与、分别交于点*M*、*N*，证明：的外接圆经过点*F*．

17.给定椭圆：（），称圆心在原点，半径为 圆是椭圆的“卫星圆”.若椭圆的一个焦点为，点在椭圆上.

（1）求椭圆的方程和其“卫星圆”方程；

（2）点是椭圆的“卫星圆”上的一个动点，过点的直线，与椭圆都只有一个交点，且，分别交其“卫星圆”于点，.试探究：的长是否为定值？若为定值，写出证明过程；若不是，说明理由.

18.给定椭圆，称圆心在原点*O*，半径为的圆为椭圆*C*的“准圆”.若椭圆*C*的一个焦点为，其短轴上的一个端点到*F*的距离为.

(1)求椭圆*C*的方程和其“准圆”方程；

(2)若点*P*是椭圆*C*的“准圆”上的动点，过点*P*作椭圆的切线，交“准圆”于点*M*，*N*，判断及线段是否都为定值，若为定值，求出定值，若不是定值，说明理由.

19.已知抛物线*C*：*x*2＝2*py*(*p*>0)的焦点为*F*，且*F*与圆*M*：*x*2＋(*y*＋4)2＝1上点的距离的最小值为4.

(1)求*p*的值；

(2)若点*P*在*M*上，*PA*，*PB*是*C*的两条切线，*A*，*B*是切点，求△*PAB*面积的最大值.

20.设椭圆，点，为*E*的左、右焦点，椭圆的离心率，点在椭圆*E*上．

(1)求椭圆*E*的方程；

(2)*M*是直线上任意一点，过*M*作椭圆*E*的两条切线*MA*，*MB*，（*A*，*B*为切点）．

①求证：；

②求面积的最小值．

21.在平面直角坐标系*xOy*中，已知直线与圆：相切，另外，椭圆：的离心率为，过左焦点作*x*轴的垂线交椭圆于*C*，*D*两点．且．

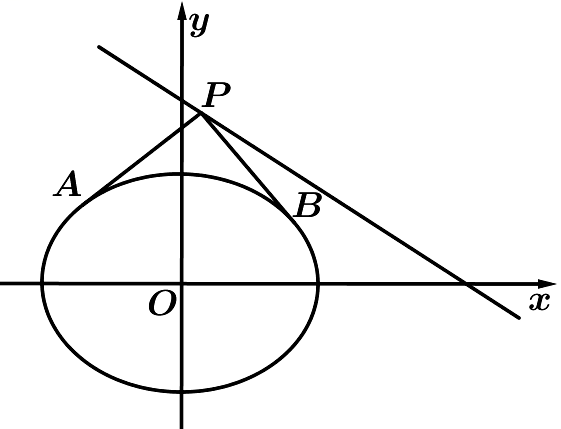
(1)求圆的方程与椭圆的方程；

(2)经过圆上一点*P*作椭圆的两条切线，切点分别记为*A*，*B*，直线*PA*，*PB*分别与圆相交于*M*，*N*两点（异于点*P*），求△*OAB*的面积的取值范围．

22.如图所示，已知椭圆：与直线：．点在直线上，由点引椭圆的两条切线，，，为切点，是坐标原点．

（1）若点为直线与轴的交点，求的面积；

（2）若，为垂足，求证：存在定点，使得为定值．



**类型三、公切线**

23.已知直线*l*分别切抛物线（）和圆于点*A*，*B*（*A*，*B*不重合），点*F*为抛物线的焦点，当取得最小值时，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

24.若直线*l*与曲线*y*＝和圆*x*2＋*y*2＝都相切，则*l*的方程为

25.已知椭圆的焦距为2，且过点．若直线为椭圆与抛物线：的公切线．其中点分别为，上的切点．

(1)求椭圆的标准方程：

(2)求面积的最小值．

26.在直角坐标系中，已知圆，*A*、*B*是抛物线上两点，的重心恰好为抛物线*S*的焦点*F*，且的面积为.

(1)求*p*的值；

(2)求与抛物线*S*的公切线的方程.

27.已知椭圆*C*中心在原点，焦点在坐标轴上，直线与椭圆*C*在第一象限内的交点是*M*，点*M*在*x*轴上的射影恰好是椭圆*C*的右焦点，椭圆*C*的另一个焦点是，且.

（1）求椭圆*C*的方程；

（2）已知圆：，动圆*P*的圆心*P*在椭圆*C*上并且与圆外切，直线*l*是圆*P*和圆的外公切线，直线*l*与椭圆*C*交于*A*，*B*两点，当圆*P*的半径最长时，求三角形*F1AB*的面积.

**类型一、圆的动切线**

例1.已知椭圆，其右焦点为，点*M*在圆上但不在轴上，过点作圆的切线交椭圆于，两点，当点在轴上时，.

(1)求椭圆的标准方程；

(2)当点在圆上运动时，试探究周长的取值范围.

【答案】(1) (2)

【解析】（1）由题意可知，再根据列出相应的方程，组成方程组解得答案;

（2）设，，从而表示出的周长，分类讨论，联立直线和椭圆方程，得到根与系数的关系式，从而结合基本不等式，求得答案.

解：(1)由题意可知，当点*M*在*x*轴上时，，不妨设，

得，解得，所以椭圆*C*的标准方程为.

(2)设，，

则，

同理，

，

同理，

所以的周长为，

①当直线*PQ*的斜率不存在时，*PQ*的方程为或.

*PQ*的方程为时，不妨设*P*，*Q*的坐标分别为，，

此时的周长为4.

*PQ*的方程为时，不妨设*P*，*Q*的坐标分别为，，

此时的周长为.

②当直线*PQ*的斜率存在时，设*PQ*的方程为，

由直线*PQ*与圆相切，得，即，

联立得，化简得，

则，易知恒成立，

而，即同号，

当时，即，此时点*M*在*y*轴右侧，所以，，

此时的周长为定值.

当时，即，此时点*M*在*y*轴左侧，所以，，

此时的周长

，

因为，所以，当且仅当，

即或时取等号.

从而，所以周长的取值范围为（4，8],

综上所述，周长的取值范围为.

练.(2021·新高考Ⅱ卷)已知椭圆*C*的方程为＋＝1(*a*>*b*>0)，右焦点为*F*(，0)，且离心率为.

(1)求椭圆*C*的方程；

(2)设*M*，*N*是椭圆*C*上的两点，直线*MN*与曲线*x*2＋*y*2＝*b*2(*x*>0)相切.证明：*M*，*N*，*F*三点共线的充要条件是|*MN*|＝.

解：(1)由题意，得椭圆半焦距*c*＝且*e*＝＝，所以*a*＝.

又*b*2＝*a*2－*c*2＝1，所以椭圆*C*的方程为＋*y*2＝1.

(2)证明　由(1)得，曲线为*x*2＋*y*2＝1(*x*>0)，

当直线*MN*的斜率不存在时，直线*MN*的方程为*x*＝1，显然不合题意；

当直线*MN*的斜率存在时，设*M*(*x*1，*y*1)，*N*(*x*2，*y*2).

必要性：

若*M*，*N*，*F*三点共线，可设直线*MN*的方程为*y*＝*k*(*x*－)，即*kx*－*y*－*k*＝0.

由直线*MN*与曲线*x*2＋*y*2＝1(*x*>0)相切可得＝1，解得*k*＝±1，

联立可得4*x*2－6*x*＋3＝0，所以*x*1＋*x*2＝，*x*1·*x*2＝，

所以|*MN*|＝|*x*1－*x*2|

＝·＝，

所以必要性成立；

充分性：设直线*MN*：*y*＝*kx*＋*m*(*km*<0)，即*kx*－*y*＋*m*＝0，

由直线*MN*与曲线*x*2＋*y*2＝1(*x*>0)相切可得＝1，所以*m*2＝*k*2＋1，

联立可得(1＋3*k*2)*x*2＋6*kmx*＋3*m*2－3＝0，

其中*Δ*＝(6*km*)2－4(1＋3*k*2)(3*m*2－3)＝24*k*2>0，

所以*x*1＋*x*2＝－，*x*1·*x*2＝，

所以|*MN*|＝·

＝

＝·＝，

化简得3(*k*2－1)2＝0，所以*k*＝±1，所以或

所以直线*MN*的方程为*y*＝*x*－或*y*＝－*x*＋，

所以直线*MN*过点*F*(，0)，即*M*，*N*，*F*三点共线，充分性成立.

综上，*M*，*N*，*F*三点共线的充要条件是|*MN*|＝.

练.已知椭圆的上顶点为*M*､右顶点为*N*.(点*O*为坐标原点)的面积为1，直线被椭圆*C*所截得的线段长度为.

（1）椭圆*C*的标准方程；

（2）试判断椭圆*C*内是否存在圆，使得圆*O*的任意一条切线与椭圆*C*交于*A*，*B*两点时，满足为定值？若存在，求出圆*O*的方程；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）；（2）存在，方程为.

【解析】（1）根据条件，列出关于的方程组，求椭圆的标准方程；（2）当斜率存在时，设直线，与椭圆方程联立，得到韦达定理，结合直线与圆相切，得到，并代入的坐标表示，利用定值与无关，求得圆的方程，当斜率不存在时，可直接求得点的坐标，得到的值，求得圆的的方程.

【详解】（1）由题意知，，由，得.

设直线与椭圆*C*交于点，，则.

把代入椭圆方程，得，

故，即.

由①②，解得或(舍去)，所以椭圆*C*的标准方程为.

（2）假设存在这样的圆*O*，设.

当直线*AB*的斜率存在时，设直线*AB*的方程为.

由，得.

设，，则，.

故

.

由，得.

由③④，得，当与*k*无关时，，，

即圆*O*的半径为.

当直线*AB*的斜率不存在时，若直线*AB*的方程为，

将其代入椭圆*C*的方程，得，，

此时.

若直线*AB*的方程为，同理可得.

综上，存在满足题意的圆*O*，其方程为.

【点睛】

解决存在性问题的注意事项：

（1）存在性问题，先假设存在，推证满足条件的结论，若结论正确则存在，若结论不正确则不存在；

（2）当条件和结论不唯一时，要分类讨论；

（3）当给出结论而要推导出存在的条件时，先假设成立，再推出条件；

（3）当条件和结论都未知，按常规方法解题很难时，要思维开放，采取另外的途径。

例1-2 ．已知为双曲线的左、右焦点，过点作垂直于轴的直线，并在轴上方交双曲线于点，且．

（1）求双曲线的方程；

（2）过圆上任意一点作圆的切线，交双曲线于两个不同的点，的中点为，证明：．

【答案】（1）；（2）证明见解析．

【解析】（1）确定，，由双曲线的定义可知：，从而可得双曲线的方程；

（2）分类讨论：①当切线的斜率存在，设切线的方程代入双曲线中，利用韦达定理，结合直线与圆相切，可得成立；

②当切线的斜率不存在时，求出，的坐标，即可得到结论．

解：（1）由题意，设，的坐标分别为，，，，

因为点在双曲线上，所以，即，所以，

在中，，，所以，

由双曲线的定义可知：，

故双曲线的方程为：．

（2）证明：由题意，即证：．

设，，，，切线的方程为：，

①当时，切线的方程代入双曲线中，化简得：，

所以：，，

又，

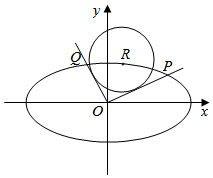
所以；

②当时，易知，所以也成立；

综上，，即，

所以．

例1-3 ．已知椭圆的一焦点与短轴的两个端点组成的三角形是等边三角形，直线与椭圆的两交点间的距离为8.



（1）求椭圆的方程；

（2）如图，设是椭圆上的一动点，由原点向圆引两条切线，分别交椭圆于点，，若直线，的斜率均存在，并分别记为，，求证：为定值；

（3）在（2）的条件下，试问是否为定值？若是，求出该值；若不是，请说明理由.

【答案】（1）；（2）证明见解析；（3）是定值，定值为25.

【解析】（1）由椭圆的离心率公式求得，由椭圆过点，代入椭圆方程，即可求得和的值，求得椭圆方程；

（2）利用点到直线距离公式，同理求得：，则，是方程的两个不相等的实根，根据韦达定理即可求得为定值；

（3）将直线和的方程，代入椭圆方程，即可求得和点坐标，

根据两点之间的距离公式，

由，即可求得为定值.

【详解】（1）由椭圆的离心率，则，

由直线过点，代入，解得：，则，

∴椭圆的标准方程：.

（2）证明：由直线，直线，

由直线为圆的切线，

，，

同理可得：，

∴，是方程的两个不相等的实根，

由，，则，

由在椭圆上，即，

∴，∴为定值.

（3）经判断为定值，

（i）由直线，不落在坐标轴上时，设，，

联立，解得，∴，

同理，得，

由，

得，



，

∴为定值，定值为25.

【点睛】

方法点睛：本题考查了椭圆的定义标准方程､直线与圆相切的性质､一元二次方程的根与系数的关系，考查了分类讨论方法､推理能力与计算能力，属于难题.

1、求定值问题常见的方法有两种：

（1）从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关；

（2）直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定理。

2、定值问题求解的基本思路是使用参数表示要解决的问题，然后证明与参数无关，这类问题选择消元的方向是非常关键的。

练. (2021·全国甲卷)抛物线*C*的顶点为坐标原点*O*，焦点在*x*轴上，直线*l*：*x*＝1交*C*于*P*，*Q*两点，且*OP*⊥*OQ*.已知点*M*(2，0)，且⊙*M*与*l*相切.

(1)求抛物线*C*，⊙*M*的方程；

(2)设*A*1，*A*2，*A*3是*C*上的三个点，直线*A*1*A*2，*A*1*A*3均与⊙*M*相切.判断直线*A*2*A*3与⊙*M*的位置关系，并说明理由.

解　(1)由题意，直线*x*＝1与*C*交于*P*，*Q*两点，且*OP*⊥*OQ*，设*C*的焦点为*F*，*P*在第一象限，

则根据抛物线的对称性，得∠*POF*＝∠*QOF*＝45°，

所以*P*(1，1)，*Q*(1，－1).

设抛物线*C*的方程为*y*2＝2*px*(*p*＞0)，

则1＝2*p*，得*p*＝，

所以抛物线*C*的方程为*y*2＝*x*.

由题意，圆心*M*(2，0)到*l*的距离即⊙*M*的半径，且距离为1，

所以⊙*M*的方程为(*x*－2)2＋*y*2＝1.

(2)直线*A*2*A*3与⊙*M*相切，理由如下：

设*A*1(*x*1，*y*1)，*A*2(*x*2，*y*2)，*A*3(*x*3，*y*3)，

当*A*1，*A*2，*A*3中有一个为坐标原点，另外两个点的横坐标均为3时，*A*1*A*2，*A*1*A*3均与⊙*M*相切，此时直线*A*2*A*3与⊙*M*相切.

当*x*1≠*x*2≠*x*3时，直线*A*1*A*2的方程为*x*－(*y*1＋*y*2)*y*＋*y*1*y*2＝0，

则＝1，

即(*y*－1)*y*＋2*y*1*y*2＋3－*y*＝0，

同理可得(*y*－1)*y*＋2*y*1*y*3＋3－*y*＝0，

所以*y*2，*y*3是方程(*y*－1)*y*2＋2*y*1*y*＋3－*y*＝0的两个根，

则*y*2＋*y*3＝，*y*2*y*3＝.

直线*A*2*A*3的方程为*x*－(*y*2＋*y*3)*y*＋*y*2*y*3＝0.

设点*M*到直线*A*2*A*3的距离为*d*(*d*＞0)，

则*d*2＝＝＝1，从而*d*＝*r*＝1，

所以直线*A*2*A*3与⊙*M*相切.

综上可得，直线*A*2*A*3与⊙*M*相切.

**类型二、圆锥曲线的动切线**

例2-1． (2021·宿州质检)已知点*A*(－1，0)，*B*(1，0)，动点*P*满足|*PA*|＋|*PB*|＝4，*P*点的轨迹为曲线*C*.

(1)求曲线*C*的方程；

(2)已知圆*x*2＋*y*2＝*R*2上任意一点*P*(*x*0，*y*0)处的切线方程为：*x*0*x*＋*y*0*y*＝*R*2，类比可知椭圆：＋＝1上任意一点*P*(*x*0，*y*0)处的切线方程为：＋＝1.记*l*1为曲线*C*在任意一点*P*处的切线，过点*B*作*BP*的垂线*l*2，设*l*1与*l*2交于*Q*，试问动点*Q*是否在定直线上？若在定直线上，求出此直线的方程；若不在定直线上，请说明理由.

解　(1)由椭圆的定义知*P*点的轨迹是以*A*，*B*为焦点，长轴长为4的椭圆，

依题意，*c*＝1，2*a*＝4.

所以*a*＝2，*b*2＝*a*2－*c*2＝3.

故曲线*C*的方程为＋＝1.

(2)设*P*(*x*0，*y*0)，由题知直线*l*1的方程为＋＝1.①

当*x*0≠1时，*kPB*＝，

所以*l*2的斜率*k*2＝－＝，

则直线*l*2的方程为*y*＝(*x*－1)，②

联立方程①②，消*y*得3*x*0*x*＋4(1－*x*0)(*x*－1)－12＝0.

变形化简，得(4－*x*0)*x*＝4(4－*x*0)，则*x*＝4.

所以动点*Q*在定直线*x*＝4上，

当*x*0＝1时，*y*0＝±，*l*1：±＝1，*l*2：*y*＝0，*Q*(4，0)，*Q*在直线*x*＝4上，

综上所述，动点*Q*在定直线*x*＝4上.

练. 在平面直角坐标系中，已知椭圆：的离心率为，且经过点.

（1）求椭圆的方程；

（2）设为椭圆的右焦点，直线与椭圆相切于点（点在第一象限），过原点作直线的平行线与直线相交于点，问：线段的长是否为定值？若是，求出定值；若不是，说明理由.

【答案】（1）；（2）是定值， .

【分析】

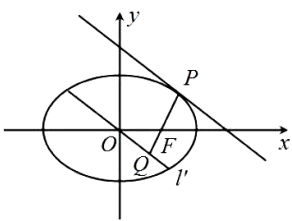
（1）根据条件列出关于*a,b,c*方程组求解得到*a*，*b*的值，从而得到椭圆的标准方程；

（2）设出*P*的坐标，利用椭圆上某点处的切线方程公式求出切线方程，利用平行线的关系得出直线 *l*的方程，与直线的方程联立，求得的坐标，利用两点间距离公式求得关于的表达式，并利用*P*的坐标满足椭圆方程，消元并化简得到常数值.

【详解】

解：（1）由题意知

椭圆的方程为．



（2）设直线的方程为

过原点且与平行的直线的方程为

椭圆的右焦点，由整理得到直线的方程为，

联立

∴

为定值．

例2-2. （2021. 广东省揭阳市高三下学期教学质量测试）已知椭圆的离心率为，且经过点*.*设椭圆的左、右焦点分别为、，是椭圆上的一个动点（异于椭圆的左、右端点）*.*

（1）求椭圆的方程；

（2）过点作椭圆的切线，过点作的垂线，垂足为，求面积的最大值*.*

【解析】（1）由椭圆的离心率，可得：，即有.

再结合、、三者的关系可得.

椭圆的方程可化为，

将点代入上述椭圆方程可得.

求解得，所以，，.

椭圆的方程为；

（2）设直线，

联立直线与椭圆的方程可得*.*

若直线与椭圆相切，可得上述方程只有一个解，即有，化简可得，（\*）.

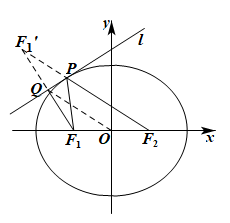
设点的坐标为，过点作的垂线为，

联立与求得，.

由上式可得，

将（\*）代入上式可得，故可知点的轨迹为以原点为圆心，以为半径的圆.

是椭圆上的异于端点的动点，故该轨迹应去掉点.



的面积为，即面积的最大值为.

练．已知椭圆：()的焦点在抛物线的准线上，且椭圆经过点.

（1）求椭圆的方程；

（2）设椭圆的左､右顶点分别为，，过，分别作长轴的垂线，，椭圆的一条切线：与直线，分别交于，两点.求证：以为直径的圆经过定点.

【答案】（1）；（2）见解析.

【解析】

【分析】

（1）根据椭圆：()的焦点在抛物线的准线上，求出左焦点坐标，再根据椭圆经过点和即可求得椭圆的方程；

（2）由椭圆的一条切线：，联立，消得：，则，得，由：与直线，分别交于，两点，得,的坐标，求出，证得，即可得证.

【详解】

解：（1）抛物线的准线为，

所以，即，

又因椭圆经过点，

则，解得：，

所以椭圆的方程为；

（2），，

所以：，：，

联立，消得：，

因为直线椭圆的一条切线，

所以，

得：，故，

因为与直线，分别交于，两点，

设，，

所以，，

则，

因为，，

则，

所以，

所以，

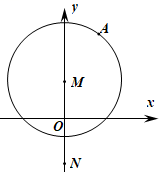
即，

所以以为直径的圆经过定点.

【点睛】

本题考查了椭圆与抛物线的综合应用，考查了椭圆的性质，难度较大.

练．在一张纸片上，画有一个半径为4的圆（圆心为*M*）和一个定点*N*，且，若在圆上任取一点*A*，将纸片折叠使得*A*与*N*重合，得到折痕*BC*，直线*BC*与直线*AM*交于点*P*．



(1)若以*MN*所在直线为轴，*MN*的垂直平分线为*x*轴，建立如图所示的平面直角坐标系，求点*P*的轨迹方程；

(2)在（1）中点*P*的轨迹上任取一点*D*，以*D*点为切点作点*P*的轨迹的切线，分别交直线，于*S*，*T*两点，求证：的面积为定值，并求出该定值；

(3)在（1）基础上，在直线，上分别取点*G*，*Q*，当*G*，*Q*分别位于第一、二象限时，若，，求面积的取值范围．

【答案】(1)

(2)证明见解析，定值为2

(3)

【解析】

【分析】

（1）结合几何关系将所求问题转化为求的定值问题即可求解曲线方程；

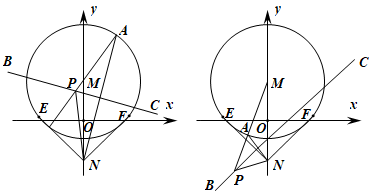
（2）先由斜率为0求出，当斜率不为0时，设直线方程为，联立直线与双曲线方程，由得，再由切割法得

，求出点，联立直线与渐近线方程求出，代入面积公式化简即可；

（3）设，，，由代换出点坐标，将代入双曲线方程化简得，再结合坐标面积公式进一步化简得关于的对勾函数，由对勾函数性质可求面积的取值范围．

(1)

过点*N*作圆*M*的切线，切点分别为*E*，*F*．



由题意知，*BC*是线段*AN*的垂直平分线，

因为直线*B*C与直线*AM*交于点*P*，所以，

当点*A*在劣弧*EF*上时，点*P*在射线*MA*上，所以；

当点*A*在优弧*EF*上时，点*P*在射线*AM*上，所以．

所以，

所以点*P*的轨迹是以*M*，*N*为焦点的双曲线．

设该双曲线的标准方程为，

则，，

所以*a*＝2，，，

所以点*P*的轨迹方程为；

(2)

双曲线的渐近线为．由题意知直线*l*的斜率存在，设

当直线*l*的斜率为0时，易知是以*ST*为底边的等腰三角形，

,，则，此时．

当直线*l*的斜率不为0时，设直线*l*的方程为，

联立消去*x*得，

．①

设直线*l*与*y*轴交于点*H*，则，

则．

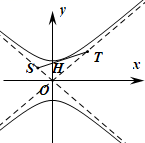
（直接求的面积不易求得，将进行拆分）

联立，

联立．

则（定值）．

综上所述，的面积为定值2；



(3)

由题可设，，，，．

因为，所以

将点的坐标代入双曲线方程有，化简得．

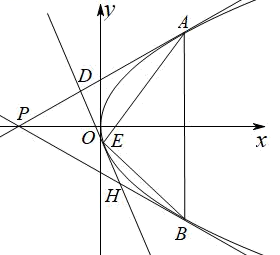
故．

（三角形面积公式）

因为，所以由对勾函数性质得，

故．

练．如图，已知抛物线上的点*R*的横坐标为1，焦点为*F*，且，过点作抛物线*C*的两条切线，切点分别为*A*、*B*，*D*为线段*PA*上的动点，过*D*作抛物线的切线，切点为*E*（异于点*A*，*B*），且直线*DE*交线段*PB*于点*H*.



(1)求抛物线*C*的方程；

(2)（i）求证：为定值；

（ii）设，的面积分别为，求的最小值.

【答案】(1) (2)6

【解析】

【分析】

（1）依据抛物线定义即可求得抛物线*C*的方程；

（2）依据设而不求的方法得到的表达式再去证明其为定值；依据设而不求的方法得到的表达式再去求其最小值即可.

(1)

抛物线的焦点，准线

则，则，抛物线*C*的方程为

(2)

（i）设直线*AP*：

由，可得

则，解得

则，解得

不妨令直线*AP*：，直线*BP*：，则

设，设直线

由，可得

由，可得或（舍）

则，直线

由，可得

故，为定值.

（ii）由（i）得，

，

则，

故，令

则

当时，，单调递减；

当时，，单调递增

则，故的最小值为6.

例2-3．（广东省珠海市2021届高三下学期第一次学业质量检测T21）．已知椭圆：，，为其左右焦点，离心率为，.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）设点，点在椭圆上，过点作椭圆的切线，斜率为，，的斜率分别为，，则是否是定值？若是，求出定值；若不是，请说明理由.

（3）设点，点在椭圆上，点在的角分线上，求的取值范围.

【答案】（1）；（2）是定值-8；（3）.

【分析】

（1）建立，，的三个方程，求解即可得椭圆的标准方程；

（2）先把用，表示，再把，也用，表示，代入中即可得结论；

（3）把点在的角分线上转化为点 到直线和直线的距离相等，进而建立一个方程，化简即可得到得．

【详解】

（1）由题设知，解得，∴椭圆：.

（2）是定值-8，下面证明之.

∵点，过点作椭圆的切线，斜率为，

∴：且，

与：联立消得

 “\*”

由题设得，

即，

∵点在椭圆上，∴，代入上式得.

（另法：过上的点的切线为

：，其斜率为，，，

∴（定值），

∴是定值-8.

（3）由题设知，，

∵点，

∴：即，

：即，

∵点在的角分线上，∴点到直线和直线的距离相等，

∴，

∵点在椭圆上，∴，

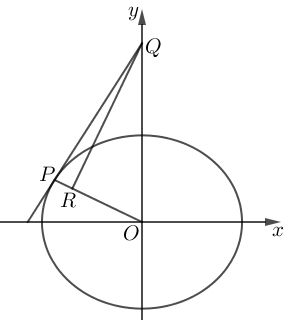
故得，

∵，，∴，

得，

∴的取值范围是.

练．已知椭圆，过椭圆在第二象限上的任意一点作椭圆的切线与轴相交于 点，是坐标原点，过点作，垂足为，则的取值范围是 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_



【答案】

【分析】

设出点*P*的坐标，求出切线*PQ*方程，进而求得点*Q*坐标，再借助数量积及对勾函数单调性即可得解.

【详解】

设，则有，即，

显然切线*PQ*斜率存在，设*PQ*的方程：，

由消去*y*并整理得：，

因此，，化简整理得：，

即，亦即，解得，

则直线*PQ*方程为：，当时，，即点，

，又，则，

令，，函数在上单调递增，

则，即，于是得，

所以的取值范围是.

故答案为：

例2-4. 已知椭圆方程为＋＝1，若抛物线*x*2＝2*py*(*p*>0)的焦点是椭圆的一个焦点.

(1)求该抛物线的方程；

(2)过抛物线焦点*F*的直线*l*交抛物线于*A*，*B*两点，分别在点*A*，*B*处作抛物线的切线，两条切线交于*P*点，则△*PAB*的面积是否存在最小值？若存在，求出这个最小值及此时对应的直线*l*的方程；若不存在，请说明理由.

解　(1)由椭圆＋＝1，知*a*2＝4，*b*2＝3.

所以*c*＝＝＝1.

又抛物线*x*2＝2*py*(*p*>0)的焦点是椭圆的一个焦点，

所以＝1，则*p*＝2.

于是抛物线的方程为*x*2＝4*y*.

(2)△*PAB*的面积存在最小值，理由如下：

由抛物线方程*x*2＝4*y*知，*F*(0，1).

易知直线*l*的斜率存在，则设直线*l*的方程为*y*＝*kx*＋1.

由消去*y*并整理，得*x*2－4*kx*－4＝0，

且*Δ*＝(－4*k*)2－4(－4)＝16*k*2＋16>0.

设*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，则*x*1＋*x*2＝4*k*，*x*1*x*2＝－4.

对*y*＝求导，得*y*′＝，所以直线*AP*的斜率*kAP*＝.

则直线*AP*的方程为*y*－*y*1＝(*x*－*x*1)，即*y*＝*x*－*x*.

同理得直线*BP*的方程为*y*＝*x*－*x*.

设点*P*(*x*0，*y*0)，联立直线*AP*与*BP*的方程，

得即*P*(2*k*，－1).

|*AB*|＝|*x*1－*x*2|

＝·

＝·＝4(1＋*k*2)，

点*P*到直线*AB*的距离*d*＝＝2，

所以△*PAB*的面积

*S*＝×4(1＋*k*2)×2＝4(1＋*k*2)≥4，

当且仅当*k*＝0时等号成立.

故△*PAB*的面积存在最小值4，此时直线*l*的方程为*y*＝1.

练 （2021. 安徽省江南十校高三3月一模）已知动圆与轴相切且与圆相外切，圆心在轴的上方，点的轨迹为曲线.

（1）求的方程；

（2）已知，过点作直线交曲线于两点，分别以为切点作曲线的切线相交于，当的面积与的面积之比取最大值时，求直线的方程.

【解析】（1）由题意知，到点(0，2)的距离等于它到直线的距离，

由抛物线的定义知，圆心的轨迹是以(0，2)为焦点， 为准线的抛物线(除去坐标原点)，则的方程为：.

（2）由题意知，在曲线上，直线的斜率存在，

设方程为，因为直线不经过点，所以.

由可得，

设则

以为切点的切线方程为即，

同理以为切点的切线为，

由，故两式做差整理得：，所以，两式求和整理得：，故，

所以交点，

设到的距离为到的距离为，

则

设则当，即时，取最大值，

直线的方程为

练. （2021. 江西省上饶市高三第一次联考）在平面直角坐标系eqId2272a344734c4fb088737b84294f7219中，eqId2381423d4cd146cab95f55527681a766为直线eqIdbe206d0603524b5daaf5bf1ad75b5b19上的动点，过点eqId2381423d4cd146cab95f55527681a766作抛物线eqIdba95c5d75d694dc49fb87f612634464f的两条切线eqId9de71e38d44e4ff68dc9d17481110cbf，切点分别为eqId43088bc159484601a10eb45ee0d2aa7d为eqId99a3187c2b8f4bcc9703c74c3b72f1f3的中点.

（1）证明eqIde6594a2984d743c2873dcad03c77d260轴；

（2）直线eqId99a3187c2b8f4bcc9703c74c3b72f1f3是否恒过定点？若是，求出这个定点的坐标；若不是，请说明理由.

【解析】（1）设切点eqIdde12246922554103829c08937809a2f7，eqId80f82861c17b407884d6834f56687559，eqId57bec4f4c7e84cb0ac3f779437e8f2d2，

∴切线eqIde1636eca174740a0b0bd266927becc8f的斜率为eqId735b8047beee4dee870fc72ae837a245，切线eqId703f6cb96b074732a4cc85a01e9b3a20，

设eqId6cbd7a9d89b54cbab4b6611a648bd708，则有eqIdc446bb7447014b5d883bc5c1ab83f68c，化简得eqIdb15f4529a9434442ac5f1722faaf190f，

同理可的eqId01220b3b2c5a4acfa4ba9dac3db424a6

∴eqId735b8047beee4dee870fc72ae837a245，eqIdecaaaffea9af458c8e6dff16f15c1a73是方程eqIdf85f529bc4314e00a4fb6fd65ecf77a6的两根，∴eqId0cc02bdb245545e0876ab0db8313aedc，eqIdcdaee0e23a0b4b0186f644a3fc27d1bf，

eqIdfc40667cbe304d3ab425e9a4851fad40，∴eqIde6594a2984d743c2873dcad03c77d260轴.

（2）∵eqId26207ac0ec7f49e0b66e63da001ae1ea，∴eqId52f32632fabc4c32802f56131330fa19.

.eqId1844d9c0554f4a8eb2c2db780d1b1c22，

∴直线eqId274c2ab600904512838489d3c69551da，即eqId07c9467e705d41d79c7c10b7323f999d，

∴直线eqId99a3187c2b8f4bcc9703c74c3b72f1f3过定点eqIdcd5b60f0f4654cc69337b68261bf8233.

练．已知抛物线*E*：的焦点为*F*，点在*E*上．

(1)求；

(2)抛物线*E*在点*T*处的切线为，经过点*F*的直线与抛物线*E*交于*A*、*B*两点（与*T*不重合），抛物线在*A*、*B*两点处的切线分别为、，若与交于*P*点，与、分别交于点*M*、*N*，证明：的外接圆经过点*F*．

【答案】(1)

(2)证明见解析

【解析】（1）首先求出，然后可得答案；

（2）设*AB*的方程为，，，联立消元，然后韦达定理可得：，，然后依次求出*l*、、的方程，然后可得，然后计算即可证明.

(1)因为点在*E*上，于是，解得，所以．

(2)由（1）可知，*F*坐标为，，，，

所以*l*的方程为：，

由题意直线*AB*的斜率存在，设*AB*的方程为，，，

联立得，由韦达定理可得：，，

的斜率为，所以的方程为，

同理：所以的方程为，

联立、的方程解得点*P*的坐标为，

联立、*l*的方程解得点*M*的坐标为，同理：点*N*的坐标为，

因为，所以，即，所以*MN*是的外接圆的直径，

，，

，

所以，*F*在以*MN*为直径的圆上，故的外接圆经过点*F*．

例2-5.广东省梅州市2021届高三下学期3月总复习质检21．给定椭圆：（），称圆心在原点，半径为 圆是椭圆的“卫星圆”.若椭圆的一个焦点为，点在椭圆上.

（1）求椭圆的方程和其“卫星圆”方程；

（2）点是椭圆的“卫星圆”上的一个动点，过点的直线，与椭圆都只有一个交点，且，分别交其“卫星圆”于点，.试探究：的长是否为定值？若为定值，写出证明过程；若不是，说明理由.

【答案】（1）椭圆的方程为，卫星圆的方程为；（2）是定值，证明过程见解析.

【分析】（1）利用焦点坐标和椭圆的定义可得椭圆的方程,进而得出其“卫星圆”方程；

（2）的长度为定值，当，中有一条无斜率时，求出点，坐标，得出的长；当，都有斜率时，设点，设出经过点与椭圆只有一个交点的直线，与椭圆方程联立，利用根与系数的关系以及点在“卫星圆”上，得出的长．

【详解】（1）由条件可得椭圆的另一个焦点为，

∴，∴，，，

所以椭圆的方程为，卫星圆的方程为.

（2）的长度为定值，证明过程如下：

①当，中有一条无斜率时，不妨设无斜率，

因为与椭圆只有一个交点，则其方程为或，

当方程为时，

此时与“卫星圆”交于点和，

此时经过点，且与椭圆只有一个交点的直线是或，即为或，∴，

∴线段是“卫星圆”的直径，∴.

②当，都有斜率时，设点，其中，

设经过点与椭圆只有一个交点的直线为，则



消去得到 ，

∴，

∴，

所以，满足条件的两直线，垂直.

∴线段是“卫星圆”的直径，∴，

综合①②知：为定值.

【点睛】

关键点点睛：本题考查椭圆的标准方程，考查直线与椭圆的位置关系，解决本题的关键点是联立过点与椭圆只有一个交点的直线方程和椭圆方程，利用判别式为零，得出两条直线斜率间的关系，进而根据线段是“卫星圆”的直径求出弦长，考查学生逻辑思维能力和计算能力，属于中档题．

练．给定椭圆，称圆心在原点*O*，半径为的圆为椭圆*C*的“准圆”.若椭圆*C*的一个焦点为，其短轴上的一个端点到*F*的距离为.

(1)求椭圆*C*的方程和其“准圆”方程；

(2)若点*P*是椭圆*C*的“准圆”上的动点，过点*P*作椭圆的切线，交“准圆”于点*M*，*N*，判断及线段是否都为定值，若为定值，求出定值，若不是定值，说明理由.

【答案】(1)椭圆方程： ，“准圆”方程： ；

(2) ， .

【解析】

【分析】

（1）根据题意即可算出椭圆的*a*，*b*，*c*，写出椭圆方程和“准圆”方程；

（2）根据切线的斜率是否存在分类讨论，联立方程，根据，即可求解.

(1)

由题意， ，抛物线方程为 ，

“准圆”方程为 ；

(2)

假设 中有一条斜率不存在，不妨假设为 ，则与椭圆的切点为 ，

即的方程为： 或 ，

当时，与“准圆”的交点为 或 ，此时 的方程为*y*=1或*y*=-1，

显然 ；

当的斜率都存在时，设 ，则 ，

设经过*P*点与椭圆相切的直线方程为 ，

由 得 ，

由 并化简得……① ，

设直线的斜率分别为 ，则 和 分别是①的两根，

根据韦达定理，有 ，故有 ，

由于，*P*是“准圆”上的点， ∴*MN*是“准圆”的直径，即*MN*=4，是定值；

综上，抛物线方程为，“准圆”方程为， ，*MN*=4.

【点睛】

本题的难点在于第二问，如何设直线方程，以及使用韦达定理后的设而不解，

巧妙使用韦达定理的结论来判断之间的关系，以及得出结论后（），

利用圆的性质直接求出*MN*的长度.

练. (2021·全国乙卷)已知抛物线*C*：*x*2＝2*py*(*p*>0)的焦点为*F*，且*F*与圆*M*：*x*2＋(*y*＋4)2＝1上点的距离的最小值为4.

(1)求*p*的值；

(2)若点*P*在*M*上，*PA*，*PB*是*C*的两条切线，*A*，*B*是切点，求△*PAB*面积的最大值.

解　(1)由题意知*M*(0，－4)，*F*，圆*M*的半径*r*＝1，所以|*MF*|－*r*＝4，即＋4－1＝4，解得*p*＝2.

(2)由(1)知，抛物线方程为*x*2＝4*y*，

由题意可知直线*AB*的斜率存在，设*A*，*B*，直线*AB*的方程为*y*＝*kx*＋*b*，

联立得消去*y*得*x*2－4*kx*－4*b*＝0，

则*Δ*＝16*k*2＋16*b*>0　(※)，*x*1＋*x*2＝4*k*，*x*1*x*2＝－4*b*，

所以|*AB*|＝|*x*1－*x*2|＝·＝4·.

因为*x*2＝4*y*，即*y*＝，所以*y*′＝，则抛物线在点*A*处的切线斜率为，在点*A*处的切线方程为*y*－＝(*x*－*x*1)，即*y*＝*x*－.

同理得抛物线在点*B*处的切线方程为*y*＝*x*－，

联立得则

即*P*(2*k*，－*b*).因为点*P*在圆*M*上，

所以4*k*2＋(4－*b*)2＝1　①，

且－1≤2*k*≤1，－1≤4－*b*≤1，

所以－≤*k*≤，3≤*b*≤5，满足(※)式.

设点*P*到直线*AB*的距离为*d*，则*d*＝，

所以*S*△*PAB*＝|*AB*|·*d*＝4.

由①得，*k*2＝＝，

令*t*＝*k*2＋*b*，则*t*＝，且3≤*b*≤5.

因为*t*＝在[3，5]上单调递增，所以当*b*＝5时，*t*取得最大值，*t*max＝5，此时*k*＝0，所以△*PAB*面积的最大值为20.

例2-6．已知点*P*为直线*l*：*x*＝－2上任意一点，过点*P*作抛物线*y*2＝2*px*(*p*＞0)的两条切线，切点分别为*A*(*x*1，*y*1)，*B*(*x*2，*y*2)，若*x*1*x*2为定值，则该定值为\_\_\_\_．

【答案】4

【详解】设过*A*(*x*1，*y*1)的切线方程为*x*＝*my*－*my*1＋*x*1．

由得*y*2－2*pmy*＋2*pmy*1－2*px*1＝0，

∴*Δ*＝4*p*2*m*2－4×2*p*(*my*1－*x*1)＝0，解得*m*＝．

因此切线方程为*y*1*y*＝*px*＋*px*1，同理，过*B*(*x*2，*y*2)的切线方程为*y*2*y*＝*px*＋*px*2，

又两切线的交点*P*在直线*l*：*x*＝－2上，故设*P*(－2，*t*)，则

消去*t*得．

从而，化简得(*x*1*x*2－4)(*x*2－*x*1)＝0，

又*x*2－*x*1不恒为0，故*x*1*x*2－4＝0恒成立．

故*x*1*x*2为定值4．

故答案为：4

**练。**在平面直角坐标系中，已知定点*F*（1，0），点在轴上运动，点在轴上，点为平面内的动点，且满足，．

（1）求动点的轨迹的方程；

（2）设点是直线：上任意一点，过点作轨迹的两条切线，，切点

分别为，，设切线，的斜率分别为，，直线的斜率为，求证：

．

解（1）设点，，．



由可知，点是的中点，

所以即所以点，．

所以，．

由，可得，即．

所以动点的轨迹的方程为．

（2）设点，由于过点的直线与轨迹：相切，

联立方程，整理得．

则，化简得．

显然，，是关于的方程的两个根，所以．

又，故．

所以命题得证．

例2-7．设椭圆，点，为*E*的左、右焦点，椭圆的离心率，点在椭圆*E*上．

(1)求椭圆*E*的方程；

(2)*M*是直线上任意一点，过*M*作椭圆*E*的两条切线*MA*，*MB*，（*A*，*B*为切点）．

①求证：；

②求面积的最小值．

【答案】(1)；(2)①证明见解析；②.

注：切点弦

【解析】

（1）由题得，即得；

（2）由题可得在点，处的切线方程，进而可得直线*AB*方程，再利用斜率关系即证，联立直线*AB*方程，与椭圆方程，利用韦达定理可得，再通过换元，利用函数的性质可求.

(1)由题可得，， 解得 ∴椭圆*E*的标准方程为．

(2)①设，，．

椭圆*E*在点的切线*AM*的方程为：，

在点处的切线*BM*方程为：．

又直线*AM*，*BM*过点，即，即，

故点，，在直线上，故直线*AB*方程为：，

当，即时，直线*AB*方程为：，则．

当时，直线*AB*方程为：．

右焦点，则，所以，即．

②直线*AB*方程为：与椭圆*E*联立得；，

，，



令，，

则在上单调递增，

所以当时，取最小值．

练．在平面直角坐标系*xOy*中，已知直线与圆：相切，另外，椭圆：的离心率为，过左焦点作*x*轴的垂线交椭圆于*C*，*D*两点．且．

(1)求圆的方程与椭圆的方程；

(2)经过圆上一点*P*作椭圆的两条切线，切点分别记为*A*，*B*，直线*PA*，*PB*分别与圆相交于*M*，*N*两点（异于点*P*），求△*OAB*的面积的取值范围．

【答案】(1)，；(2).

注：切点弦

【解析】（1）由直线与圆的相切关系及点线距离公式求参数*r*，即可得圆的方程，根据椭圆离心率、及椭圆参数关系求出*a、b、c*，即可得椭圆的方程.

（2）设、、，得直线*PA*为、直线*PB*为，结合在直线*PA*，*PB*上有*AB*为，联立椭圆方程，应用韦达定理、弦长公式、点线距离公式，结合三角形面积公式得求面积范围.

解(1)由题设，圆：的圆心为，

因为直线与圆相切，则，

所以圆的方程为，

因为椭圆的离心率为，即，即，

由，则，又，

所以，解得，，

所以椭圆的方程为．

综上，圆为，椭圆为.

(2)设点，，．

直线*PA*为，直线*PB*为．

因为在直线*PA*，*PB*上，所以，．

综上，直线*AB*为．

由，消去*y*得：．

所以，．

所以．

又*O*到直线*AB*的距离．

所以．

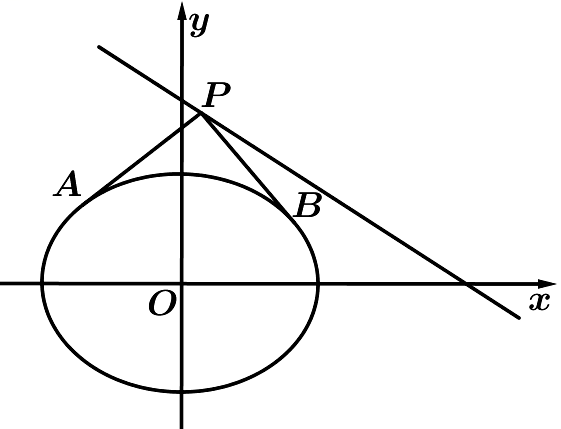
令，，则，又，

所以△*OAB*的面积的取值范围为．

【点睛】

关键点点睛：第二问，设点及直线*PA*，*PB*的方程，联立椭圆结合相切关系求参数关系，进而确定*PA*，*PB*的方程，由在直线*PA*，*PB*上求直线的方程，再联立椭圆并应用韦达定理、弦长公式、点线距离公式求三角形面积的范围.

练．如图所示，已知椭圆：与直线：．点在直线上，由点引椭圆的两条切线，，，为切点，是坐标原点．



（1）若点为直线与轴的交点，求的面积；

（2）若，为垂足，求证：存在定点，使得为定值．

【答案】(1)4；(2)，证明见解析.

注：切点弦

【解析】(1)设出直线方程，与椭圆方程联立，根据，求出直线的斜率，从而求切点坐标，根据切点坐标判断出为直角三角形，从而求的面积.

(2)先写出切线方程和，根据切线方程求出直线AB的方程及直线AB过的定点T，从而判断出OT的中点为点Q.

【详解】(1)由题意易知，显然过点P与椭圆相切的直线斜率存在，设切线方程为，

与椭圆方程联立 ，消并整理得，

由得，即切线方程为，

此时切点坐标为，易知为直角三角形，，

所以.

(2)设，则切线为，切线为，

设，则，，

所以直线的方程为————①

又点在直线：上，所以，即，

代入①，得，即 ，

所以直线过定点 ，又因为，所以点D在以为直径，为圆心的定圆上，所以为定值，且.

练. 已知点为椭圆上的任意一点（长轴的端点除外），其中，为常数．

（1）求证：直线为椭圆在点处的切线方程；

（2）过椭圆的右准线上任意一点作椭圆的两条切线，切点分别为，，请判断直线是否经过定点？若经过定点，求出定点坐标；若不经过定点，请说明理由．

（1）证明 因为点在椭圆上，



所以．

又在直线上，

所以，从而．

所以直线与椭圆有唯一公共点．

所以直线为椭圆在点处的切线方程．

（2）设点，．则由（1）椭圆在点处的切线方程为．

椭圆在点处的切线方程为．

设．

所以，．

所以*ST*的方程为．

所以直线经过定点为．

类型三、公切线

例3-1．已知直线*l*分别切抛物线（）和圆于点*A*，*B*（*A*，*B*不重合），点*F*为抛物线的焦点，当取得最小值时，\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【分析】设，首先求出直线的方程为，再利用点到直线的距离公式可得，求出，再由焦半径公式即可求解.

【详解】设，，所以，所以 ，

所以直线的方程为，则，

把代入，可解得，

∴，当且仅当时等号成立，所以.

故答案为：

练 .若直线*l*与曲线*y*＝和圆*x*2＋*y*2＝都相切，则*l*的方程为(　　)

A.*y*＝2*x*＋1 B.*y*＝2*x*＋

C.*y*＝*x*＋1 D.*y*＝*x*＋

答案　D

解析　易知直线*l*的斜率存在，设直线*l*的方程*y*＝*kx*＋*b*，则＝①.

设直线*l*与曲线*y*＝的切点坐标为(*x*0，)(*x*0>0)，

则*y*′|*x*＝*x*0＝*x*－＝*k* ②，＝*kx*0＋*b* ③.

由②③可得*b*＝，

将*b*＝，*k*＝*x*－代入①得*x*0＝1或*x*0＝－(舍去).

所以*k*＝*b*＝，

故直线*l*的方程为*y*＝*x*＋.

练.（**多选题）**已知双曲线的离心率为2，点，是上关于原点对称的两点，点是的右支上位于第一象限的动点（不与点、重合），记直线，的斜率分别为，，则下列结论正确的是（       ）

A．以线段为直径的圆与可能有两条公切线

B．

C．存在点，使得

D．当时，点到的两条渐近线的距离之积为3

【答案】ABD

【解析】

【分析】

当点，分别是的左、右顶点可判断A；利用点差法可判断B；利用基本不等式可判断C；首先求出双曲线的渐近线，再利用点到直线的距离公式即可求解.

【详解】

当点，分别是的左、右顶点时，圆与恰有两条公切线，故A正确；

设，，，则，则，

所以，故B正确；

，故C错误；

当时，，渐近线方程为，即，

点到两条渐近线的距离之积为，

双曲线，点是的右支上位于第一象限，则，

整理可得，代入上式可得，故D正确．

故选：ABD*．*

例3-2．已知椭圆的焦距为2，且过点．若直线为椭圆与抛物线：的公切线．其中点分别为，上的切点．

(1)求椭圆的标准方程：

(2)求面积的最小值．

【答案】(1)；(2)2.

【解析】（1）根据给定条件，列出关于的方程，求解作答.

（2）设出直线*AB*的方程，分别与抛物线，椭圆的方程联立，求出切点纵坐标，再求出面积的函数关系，借助均值不等式计算作答.

(1)椭圆半焦距，依题意，，，又，解得，，

所以椭圆的标准方程为：.

(2)显然直线不垂直于坐标轴，设直线的方程为，，，

由消去*x*并整理得：，

则，即，，

由 消去*x*并整理得：，

则，即，

，点*O*到直线的距离为，

∴

，

当且仅当，即时取“=”，

所以面积的最小值为2.

练．在直角坐标系中，已知圆，*A*、*B*是抛物线上两点，的重心恰好为抛物线*S*的焦点*F*，且的面积为.

(1)求*p*的值；

(2)求与抛物线*S*的公切线的方程.

【答案】(1)(2)或.

【解析】（1）设，可根据的重心恰好为抛物线*S*的焦点*F*得到坐标的关系，再根据面积可求.

（2）设公切线为，则可得的方程组，求出其解后可得公切线的方程.

(1)设，

因为的重心恰好为抛物线*S*的焦点*F*，故，

所以，故，所以与轴平行，

故的面积为，故.

(2)由（1）可得，

又：，其圆心坐标为，半径为.

由题设可知公切线的斜率必存在，设公切线为，

由可得，故即.

又，故，，

故公切线的方程为：或.

练．已知椭圆*C*中心在原点，焦点在坐标轴上，直线与椭圆*C*在第一象限内的交点是*M*，点*M*在*x*轴上的射影恰好是椭圆*C*的右焦点，椭圆*C*的另一个焦点是，且.

（1）求椭圆*C*的方程；

（2）已知圆：，动圆*P*的圆心*P*在椭圆*C*上并且与圆外切，直线*l*是圆*P*和圆的外公切线，直线*l*与椭圆*C*交于*A*，*B*两点，当圆*P*的半径最长时，求三角形*F1AB*的面积.

【答案】（1）；（2）.

【解析】（1）求出点坐标，根据可求出，点坐标代入椭圆标准方程可求得答案；

（2）由可得到，当圆*P*的半径最长时，其方程为，*l*与*x*轴的交点为*Q*，由直线与圆相切得到直线的斜率，再根据弦长公式和三角形的面积公式可得答案.

【详解】（1）设椭圆方程（），点*M*在直线上，且点*M*在*x*轴上的射影恰好是椭圆*C*的右焦点，则点.

.即，，所以，

又，解得

椭圆*C*的方程为.

（2）设动圆*P*的半径为*R*，点*P*的坐标为，，，

由已知，得，当且仅当圆*P*的圆心为时，.

所以当圆*P*的半径最长时，其方程为，

因为直线*l*是圆*P*和圆的外公切线，所以直线*l*的倾斜角不为且不平行于*x*轴，

设*l*与*x*轴的交点为*Q*，则，可求得，

设*l*：，由*l*与圆相切得，解得.

当时，将代入并整理得，，

解得，所以，

当时，由图形的对称性可知.

又点*F1*到直线*l*的距离，所以三角形*F1AB*的面积为.